

Chapitre 0

Résoudre un problème mathématique : de l'énoncé à la copie

Plan du chapitre

1	Rechercher	2
1.1	Revenir aux méthodes du chapitre	2
1.2	Traiter des cas particuliers	2
1.3	Faire un dessin	2
1.4	Réécrire le même objet autrement	3
1.5	S'inspirer d'une technique vue en démonstration en cours.	3
1.6	Partir des hypothèses et chercher les théorèmes qui les mobilisent	3
2	Raisonner	4
2.1	La formulation de l'énoncé indique le raisonnement	5
2.2	Partir de ce qu'on veut démontrer... SEULEMENT SI on raisonne par équivalences	5
3	Calculer	5
3.1	Une opération potentiellement interdite ? Disjonction de cas !	5
3.2	Quelques bonnes pratiques en calcul	5
3.3	Vérifier ses calculs	5
3.4	Signaler une erreur qu'on n'a pas su corriger	6
4	Rédiger	6
4.1	Guider votre lecteur du début à la fin	6
4.2	Faciliter la vie du correcteur	7
4.3	Appliquer proprement un théorème	7
4.4	Bien gérer son temps et le niveau de justification.	7
4.5	Introduire les variables	7

Résoudre un problème mathématique s'articule autour de quatre compétences : **Rechercher**, **Raisonner**, **Calculer**, **Rédiger**. La rédaction est la dernière étape, mais les trois premières n'ont pas d'ordre précis et se mélangent souvent entre elles : un calcul préliminaire peut servir à orienter notre recherche ou notre raisonnement, un raisonnement par disjonction de cas est parfois nécessaire en plein calcul, etc.

Ces quatre compétences sont toutes évaluées, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral. Notamment, même face à un exercice où l'on est bloqué, on peut toujours présenter des pistes de recherches, un début de calcul ou de raisonnement, avec une rédaction soignée. Tout ceci sera pris en compte dans la note et dans les concours.



1 Rechercher

Face à un exercice qui résiste, le véritable écueil est de rester sur une page blanche (ou un tableau noir). En particulier, chercher à résoudre l'exercice entièrement dans sa tête avant d'écrire quoi que ce soit est une stratégie perdante : en cas de blocage, on ne laisse aucune trace de ce qu'on a compris ou essayé. Résultat : on perd un temps précieux pour 0 point à l'arrivée.

Il faut au contraire **proposer des pistes et les explorer**, à voix haute, au brouillon ou sur la copie. Face à un problème difficile, un correcteur n'attend pas nécessairement une réponse complète et juste : **une recherche organisée, même infructueuse, est valorisée**.

Les pistes ci-dessous ne garantissent rien, mais elles permettent de mieux cerner le problème et mènent parfois à l'argument décisif.

1.1 Revenir aux méthodes du chapitre

Certaines consignes sont très classiques et nous orientent vers une ou plusieurs méthodes standards, vues en cours ou en TD.

1.2 Traiter des cas particuliers

Les cas particuliers nous permettent parfois de former une *conjecture* sur la solution attendue, conjecture que l'on doit ensuite démontrer.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Exprimer u_n en fonction de n .

Solution. La relation entre u_{n+1} et u_n ne permet pas de répondre directement, mais rien n'empêche de calculer les premiers termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 7 \\ u_3 = 15 \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \dots\dots \\ u_1 = \dots\dots \\ u_2 = \dots\dots \\ u_3 = \dots\dots \end{array} \right.$$

À partir de cela on *conjecture* la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \dots\dots\dots$$

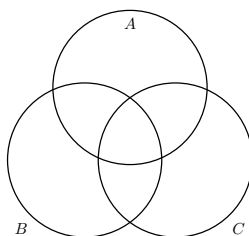
Il faut ensuite la *démontrer* rigoureusement (ici une récurrence marche bien).

1.3 Faire un dessin

Un dessin n'a pas valeur de preuve mathématique, mais il peut bien souvent orienter la réflexion et nous donner une conjecture.

Exemple. Peut-on affirmer que pour tous sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E , on a : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$?

Solution. La réponse n'est pas du tout évidente car il y a 3 objets différents. On trace alors un diagramme qui représente autant que possible un cas général :



En coloriant les zones qui correspondent à $A \cap (B \cup C)$ et en faisant de même pour $(A \cap B) \cup C$, on arrive assez rapidement à la conclusion qu'il n'y a pas égalité. Pour une preuve rigoureuse...

1.4 Réécrire le même objet autrement

Cette réécriture peut faire apparaître des simplifications salvatrices. Ce procédé se décline de bien des façons. L'une d'entre elles consiste à ajouter et retrancher la même chose (comme $+1 - 1$) ou à faire apparaître au numérateur ce qui figure au dénominateur.

Exemple. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$.

Solution. On ne reconnaît pas une primitive évidente ici. On va faire une réécriture :

1.5 S'inspirer d'une technique vue en démonstration en cours.

Certaines démonstrations présentent des techniques classiques, qu'il faut savoir réutiliser le moment venu. C'est une des raisons pour laquelle on donne des démonstrations à apprendre pour les colles.

Exemple. Le prochain exemple ci-dessous utilise justement une technique qu'on verra en démonstration en cours d'année.

1.6 Partir des hypothèses et chercher les théorèmes qui les mobilisent

Un énoncé ne contient jamais d'hypothèse décorative : chacune est là parce qu'elle sert quelque part. On peut donc relire les hypothèses une à une en se demandant *quel résultat du cours mobilise cette hypothèse*.

0.1 ★★ Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ vérifiant

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Solution. Ce qui nous oriente le plus, c'est l'hypothèse de continuité : l'an dernier, vous avez déjà rencontré un théorème qui nécessite cette hypothèse : le TVI !

Théorème – Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Bonne nouvelle : on veut l'existence d'un réel c , et c'est précisément ce que nous fournit le TVI.

Mauvaise nouvelle : on ne veut pas arriver à une conclusion du type $f(c) = y$, mais à $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

Comment progresser ?

Plutôt que d'appliquer le théorème directement à la fonction f qu'on avait en main, on l'a appliqué à une autre fonction g qu'on a construite à partir de f . C'est la technique de la **fonction auxiliaire**.

2 Raisonner

La majorité des raisonnements (par l'absurde, par contraposée, par récurrence, etc.) est étudiée au chapitre de logique et d'autres seront vus au cours de l'année. On présente ici des principes généraux pour mener à bien un raisonnement, quel que soit celui qu'on a choisi.

2.1 La formulation de l'énoncé indique le raisonnement

Plus précisément, c'est la ligne d'arrivée (le résultat qu'on veut montrer), qui vous guide vers une stratégie de départ, cf chapitre de Logique pour des exemples.

2.2 Partir de ce qu'on veut démontrer... SEULEMENT SI on raisonne par équivalences

Pour des énoncés de la forme "montrer que $A = B$ " ou "montrer que $A \leq B$ ", on peut partir de la conclusion voulue et on la transforme en des énoncés de plus en plus simples, jusqu'à tomber sur une assertion trivialement vraie. Si toutes les étapes sont bien des *équivalences*, la démonstration est terminée.

Exemple. Montrer que pour tous réels $a, b \geq 0$, on a $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Solution.

3 Calculer

3.1 Une opération potentiellement interdite ? Disjonction de cas !

Il arrive qu'on souhaite faire une opération qui serait interdite si une variable prend une ou plusieurs valeurs, comme par exemple diviser par $x^2 - 4$ alors que x pourrait valoir 2 ou -2 . Dès qu'une telle situation se produit, on doit systématiquement faire une disjonction de cas : un cas pour chaque valeur interdite, et un dernier cas où x ne prend pas de valeur interdite et où l'opération est possible.

3.2 Quelques bonnes pratiques en calcul

- **Faire suffisamment d'étapes jusqu'à être à l'aise.** On ne devient pas fiable en calculant plus vite, mais en se donnant moins d'occasions de se tromper. Si pour cela il vous faut faire plus d'étapes, faites-le !
- **Ne pas tout développer par réflexe.** Une expression factorisée peut s'avérer plus pratique qu'une expression développée : on y lit le signe, les racines, etc. Cela peut conduire à des simplifications lorsqu'on manipule des fractions ou des produits.

3.3 Vérifier ses calculs

Nul n'est à l'abri d'une erreur de calcul. Vérifier une erreur potentielle vous prend entre 10 et 15 secondes, et c'est crucial si l'exercice contient encore d'autres questions. Une erreur de calcul se répercuterait sur toutes les questions qui utilisent ce résultat !

- **Réinjecter un résultat trouvé dans l'équation de départ.** Quand on a résolu une équation, on remplace l'inconnue de l'équation par une des solutions qu'on a trouvées.
- **Tester une formule avec une valeur particulière.** Quand un calcul dépend d'un paramètre, on teste sur une valeur simple du paramètre.

Exemple. Un calcul affirme que pour tout entier $n \geq 1$, l'expression $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ serait égal à $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Cela vous semble-t-il correct ?

Solution. Pour $n = 1$, on obtient bien 1 de chaque côté. Mais pour $n = 2$, on a $1^2 + 2^2 = 5$ d'un côté et $\frac{2 \times 3 \times 4}{6}$, donc 4. Il n'y a donc pas égalité de ces deux expressions (en toute généralité).

- **Contrôle par un argument de signe, de symétrie, etc.** D'autres indices peuvent aider à déceler une potentielle erreur : une quantité positive au départ qui finit négative, une expression qui présente une symétrie et qui perd ensuite cette symétrie. Par exemple, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est symétrique en a et b : échanger ces deux lettres ne modifie pas la valeur. Cette expression ne peut donc pas en toute généralité être égal à $\frac{a+b}{a^2}$ par exemple.

3.4 Signaler une erreur qu'on n'a pas su corriger

Il arrive qu'une vérification révèle qu'il y a une erreur sans qu'on parvienne à la trouver. Dans ce cas, il ne faut surtout pas se taire et rendre un résultat dont on sait qu'il est faux. Écrivez explicitement qu'il y a une erreur et comment vous l'avez remarquée :

"L'intégrale d'une fonction positive, donne un résultat négatif. Il y a baleine sous caillou."

Cette compétence dépasse largement le cadre du concours. Savoir dire "ce résultat ne peut pas être correct, et voici pourquoi" est ce qui distingue un savant d'un charlatan. Cela devient indispensable dès qu'on utilise un outil qui produit des résultats sans en garantir la justesse, notamment les intelligences artificielles génératives. Un tel outil peut produire une réponse parfaitement rédigée et pourtant parfaitement fausse.

4 Rédiger

Rédiger, c'est produire un texte destiné à être lu, dont la fonction est de *convaincre* un lecteur qui ne connaît pas votre cheminement. Les conseils donnés ici s'appliquent surtout à l'écrit. À l'oral, on peut compléter ce qui manque sur le tableau au fil de l'eau.

4.1 Guider votre lecteur du début à la fin

- **Annoncer et structurer votre raisonnement.** "Raisonnons par *l'absurde*. On suppose que ...", "Procédons par *récurrence* sur n ". Une fois un raisonnement commencé, on doit pouvoir identifier clairement les étapes : l'analyse et la synthèse, l'initialisation et l'hérédité, le cas 1 et le cas 2, etc.
- **Faire des phrases complètes avec des mots de liaisons ("donc"...).** Empiler des assertions sans un mot rend votre démonstration inintelligible. Telle ou telle assertion est-elle affirmée comme vraie ? supposée vraie ? à démontrer ? Pour cela, on se sert de mots de liaison qui sous-tendent la logique : "donc", "or", "ainsi", "en effet", "il suffit de montrer que", "supposons", "réciproquement".
- **Ne pas utiliser les symboles mathématiques comme des abréviations.** Les symboles $\implies$, $\iff$, $\forall$, $\exists$ ne doivent pas être utilisés dans des phrases "en français" : ils sont réservés aux assertions mathématiques. Il y a toutefois des exceptions : on peut écrire par exemple le symbole $\in$ dans une phrase "Comme $n \in \mathbb{N}$..."

4.2 Faciliter la vie du correcteur

Les correcteurs de concours peuvent avoir jusqu'à 300 copies à corriger, il vaut mieux leur faciliter la tâche... Ils peuvent passer moins de 15 minutes par copie. Centrale, Mines-Ponts, CCINP... : les rapports de jury sont unanimes.

- Écrire lisiblement, avec une encre assez foncée (les copies sont scannées)
- Numérotter les questions et les copies.
- Traiter les questions dans l'ordre, laisser un blanc si vous sautez une question.
- Aérer la copie en sautant des lignes.
- Encadrer ou souligner les résultats finaux.
- ~~Barre~~ proprement à la règle tout ce qui ne sert pas à votre réponse.

4.3 Appliquer proprement un théorème

- **Vérifier explicitement les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.** Inutile de réécrire le théorème complet. Par contre, si un théorème nécessite des *hypothèses*, il faut les vérifier consciencieusement, au moins la première fois qu'on s'en sert.
- **Si le théorème a un nom, on doit le citer.** Par exemple, "théorème des valeurs intermédiaires" doit être écrit en entier la première fois. Par la suite, on peut l'abréger en "TVI". Pour les théorèmes sans nom, on peut se contenter de vérifier les éventuelles hypothèses, et on comprend par le contexte quel théorème vous avez utilisé (par exemple " f est dérivable donc f est continue").

4.4 Bien gérer son temps et le niveau de justification

Vous n'avez qu'un temps limité en devoir comme en colle. Votre objectif est de maximiser votre ratio points/-temps.

Justifier ni trop, ni trop peu. Ne pas justifier assez, c'est perdre des points. Justifier trop, c'est perdre du temps. Votre objectif est de viser le juste milieu. Le bon dosage ne s'acquiert que par la pratique, en suivant attentivement tous les corrigés (DS, DM, TD, colles ...).

Soigner la justification des premières questions. Les premières questions d'un exercice sont souvent proches du cours, donc accessibles à tout le monde : c'est là que la rédaction fait la différence entre les copies. Un début bien rédigé met le correcteur en confiance : il sera alors plus disposé à vous pardonner un manque de rigueur plus tard.

Limiter votre temps passé au brouillon. Tout écrire deux fois est le meilleur moyen de perdre du temps, une question résolue mais restée au brouillon ne rapporte aucun point. Pour les questions les plus simples, ou avec une méthode type, écrivez directement sur la copie.

4.5 Introduire les variables

En français, si vous dites : "Elle les lui a donnés hier" sans avoir précisé auparavant qui sont "elle", "les" et "lui", personne ne comprendra. En maths c'est pareil, et c'est une règle d'or : **tout objet dont on parle doit avoir été introduit.** Ce peut être introduit par le cours, l'énoncé, ou vous-même.

1. **Objet universel** : de nombreux objets mathématiques ont une notation spécifique et universelle pour les désigner. Les symboles " 3 ", " π ", " $\cos$ " ou encore " $\mathbb{R}$ " désignent *un seul et unique objet*. Ces objets ont un sens universel et il n'est pas nécessaire de les introduire.

2. **Variable libre** : l'énoncé (mais aussi vous-même) peut introduire une notation pour représenter un objet.

(a) Une variable libre peut avoir une valeur "fixée" :

$$\text{On pose } \ell = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$$

Soit f la fonction $x \mapsto \cos(2x)$

On note P l'ensemble des nombres premiers

L'intérêt principal est de gagner du temps car on peut réutiliser les lettres K , f et P pour désigner ces objets.

(b) Une variable libre peut aussi ne pas avoir de valeur fixe. Elle représente alors un élément quelconque de l'ensemble auquel elle appartient :

Soit $x \in E$

Étant donné a un réel quelconque

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3. **Variable muette / liée** : certaines expressions mathématiques introduisent automatiquement des variables liées : ces variables permettent de raccourcir l'écriture et *leur existence est limitée à l'intérieur de l'expression*. Voici une liste des cas les plus fréquents en MPSI :

Expression	Var. muette	Expression sans la variable muette
La fonction $x \mapsto e^x$	$x \in \mathbb{R}$	La fonction exponentielle
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$	$n \in \mathbb{N}$	La suite qui à chaque entier associe son carré
$\int_0^1 \sin(x) dx$	$x \in [0, 1]$	L'intégrale de la fonction sinus sur $[0, 1]$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$	x	La limite de la fonction exponentielle en $-\infty$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$k \in \{1, 2, \dots, n\}$	$1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \ln y = x$	$x, y \in \mathbb{R}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout réel, il existe un second réel} \\ \text{tel que le logarithme népérien du second réel} \\ \text{soit égal au premier réel} \end{array} \right.$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$	$x \in \mathbb{R}$	L'ensemble des réels dont le carré est supérieur à 1

Du fait qu'une variable muette est "fictive", on peut choisir le symbole qu'on souhaite pour la représenter :

$$\int_0^1 \cos(x) dx = \int_0^1 \cos(u) du = \int_0^1 \cos(\heartsuit) d\heartsuit$$



Certaines expressions peuvent mélanger des variables liées et des variables libres : par exemple dans $\sum_{k=1}^n k^2$, le k est lié mais le n doit avoir été introduit précédemment pour que cela ait un sens.

Remarque. Lorsque vous introduisez une variable, il faut s'assurer que la lettre utilisée ne soit pas déjà employée pour désigner un autre objet. On ne peut donc pas écrire "Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\int_0^x \cos(x) dx$ " car il y a une confusion entre la variable libre x introduite par "Soit" et la variable x liée de l'intégrale.